Chapitre 2

Transformée de Laplace et représentation des Systèmes asservis

Introduction

Une partie de ce chapitre va traiter une technique de transformation mettant en rapport les fonctions du temps avec des fonctions de la variable complexe dépendant de la fréquence. Cette transformation on l'appelle la transformée de Laplace, qui est une transformation mathématique qui s'applique à la résolution d'équations différentielles à coefficients constants, et c'est sur elle que sont fondées les techniques d'analyse et de conception.

La deuxième partie du chapitre sera consacrée à la représentation des systèmes asservis en passant d'une équation différentielle à une fonction de transfert exprimée dans le domaine de Laplace.

PREMIERE PARTIE :

I. La transformée de Laplace

I.1. Définition : considérons une fonction réelle $s(t)$ telle que $s(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformation de Laplace $L(s(t))$ comme la fonction de S de la variable complexe p , telle que :

$$S(p) = L\big(s(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\, e^{-p.t} dt$$

La fonction $S(p)$ est une fonction complexe d'une variable complexe p (avec $p = \tau + j.w$).

D'une manière plus générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulle pour tout $t < 0$) vers l'espace des fonctions complexes d'une variables complexe.

I.2. Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement les transformées de Laplace de certains signaux.

a- Linéarité : La linéarité de la transformée de Laplace d'une des plus importantes des propriétés :

$$\boldsymbol{L\{\alpha.f(t)+\beta.g(t)\}=\alpha.L\{f(t)\}+\beta.L\{g(t)\}}$$

Et en particulier :

$$\boldsymbol{L\{f(t)+g(t)\}=L\{f(t)\}+L\{g(t)\}}$$

Et

$$\boldsymbol{L\{k.f(t)\}=k.L\{f(t)\}}$$

b- Transformée de Laplace d'une dérivée : Soit $\boldsymbol{f(t)}$ une fonction de temps. Soit $\boldsymbol{F(p)}$ sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de $F(p)$:

$$\boldsymbol{\frac{df(t)}{dt}\rightarrow p.F(p)-f(0)}$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée nième est :

$$\frac{d^nf(t)}{dt^n}=p^nF(p)-\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-1-k}\frac{d^k}{dt^k}f(t)|_{t=0}$$

Par exemple :

$$\boldsymbol{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\rightarrow p^2.F(p)-p.f(0)-f'(0)}$$

Dans le cas où les conditions initiales sont nulles, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df(t)}{dt}\rightarrow p.F(p) \qquad \text{et} \qquad \frac{d^nf(t)}{dt^n}=p^nF(p)$$

c- Transformée de la place d'une primitive : Soit $g(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$g(t)=\int f(t).dt\rightarrow\frac{F(p)}{p}+\frac{g(0)}{p}$$

Quand les conditions initiales sont nulles : $G(p) = \frac{F(p)}{p}$

d- Théorème du retard : considérons la fonction $f(t)$ retardée de τ, qu'on écrit $f(t-\tau)$ (voir la figure 1). Sa transformée de Laplace est :

$$L\{f(t-\tau)\} = F(p).e^{-p\tau}$$

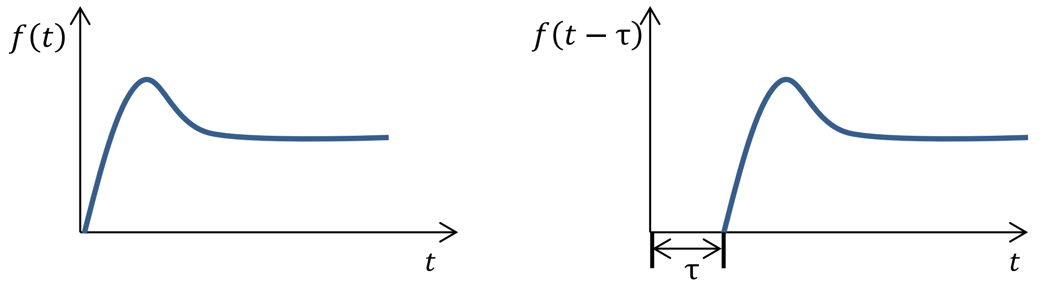

Figure 1 : exemple d'un tracé d'une fonction $f(t)$ et de $f(t-\tau)$

e- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to +\infty} p.F(p)$$

f- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p.F(p)$$

g- Transformée de Laplace de quelques signaux usuels :

g-1 : Echelon d'amplitude E_0

$e(t) = E_0 \times u(t)$, avec $u(t)$ est l'échelon de Heaviside. Quand $E_0 = 1$, on dit que l'échelon est unitaire.

La transformée de la place de ce signal est : $L\{e(t)\} = \frac{E_0}{p}$

g-2 : Rampe ou échelon de vitesse :

Il s'agit de l'intégrale de la fonction échelon $e(t)$:

$$\mathrm{c}(t) = \int e(t).dt \Rightarrow TL\{c(t)\} = \frac{E_0}{p^2}$$

g-3 : Impulsion unitaire :

En dérivant, cette fois-ci, la fonction échelon, on aura une impulsion de Dirac.

$$I(p) = L\{\sigma(t)\} = 1$$

g-4 : Signal sinusoïdal :

$$s(t) = \sin(w.t+\varphi) \text{ pour } \mathrm{t} \geq 0$$

$$L\{s(t)\} = S(p) = \frac{p.\sin\varphi + w.\cos\varphi}{w^2+p^2}$$

Pour $\varphi = 0$, on retient $S(p) = \frac{w}{w^2+p^2}$

Remarque : Un tableau de la TL (la Transformée de Laplace) des fonctions usuelles sera transmis sous forme de fichier à part.

Il est important de noter que la TL permet de passer d'un problème exposé dans le domaine de temps à un problème dans le domaine complexe p. Une fois la solution est obtenue dans le domaine complexe, il est nécessaire de revenir au domaine temps.

II- Transformée de Laplace inverse

a- Définition : soit $F(p)$ une fonction de la variable complexe p, alors la transformée de Laplace inverse est donnée par : $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$ tel que $p = \tau + j.w$

Ou $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\tau-j\infty}^{\tau+j\infty} F(p).e^{p.t}\,.dp$

Remarque : Pour calculer l'inverse de La transformée de Laplace, on n'utilise jamais la définition.

- La transformée de Laplace inverse est une transformée linéaire et la plupart des signaux usuels sont les fonctions rationnelles $\frac{N(p)}{D(p)}$, il suffit de décomposer en fractions simples et d'utiliser les propriétés de la transformée de Laplace.

b- Propriété de la transformée de Laplace inverse : La transformée inverse de Laplace est une transformation linéaire entre fonctions définies sur le domaine de temps t. Ce qui veut dire que, si $f_1(t)\ et\ f_2(t)$ sont les transformées inverses de $F_1(p)\ et\ F_2(p)$ respectivement, alors :

$TL^{-1}\{b_1.F_1(p) + b_2.F_2(p)\} = b_1.f_1(t) + b_2.f_2(t)$, ou b_1 et b_2 sont les constantes arbitraires.

II-1. Méthodes utilisées pour le calcul de la TL^{-1} :

Toutes les fonctions que nous allons étudier sont des fonctions rationnelles, avec ou sans retard.

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m.p^m + b_{m-1}.p^{m-1} + \ \dots\dots\dots..+b_0}{a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \cdots\dots\dots\dots + a_0}$$

$N(p)$= représente le numérateur de $F(p)$, polynôme en p de degré m.

$D(p)$= représente le dénominateur de $F(p)$, polynôme aussi en p, de degré n.

- **Pôles de $F(p)$:** ce sont des valeurs de p qui annulent le dénominateur, c'est-à-dire les racines de l'équation $D(p)= a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \cdots \dots\dots\dots + a_0 = 0$ (l'équation possède n solutions).
- **Zéros de $F(p)$:** valeurs de p qui annulent le numérateur, c'est-à-dire les racines de l'équation $N(p)= b_m.p^m + b_{m-1}.p^{m-1} + \dots\dots\dots..+b_0 = 0$ (l'équation possède m solutions).

Exemple : Soit la fonction rationnelle $F(p)$ suivante :

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2+3p+2}$$

Les pôles et les zéros de $F(p)$ sont : $\begin{cases} z = -1 \ \ est\ le\ zéro\ de\ F(p) \\ p_1 = -2 \ \ et \ \ p_2 = -1\ sont\ les\ deux\ pôles\ de\ F(p) \end{cases}$

- **Cas de pôles simples :** soient $p_1, p_2, \dots\dots\dots.., p_n$ les pôles d'une fonction rationnelle $F(p)$.

$$D(p) = (p-p_1) \times (p-p_2) \times \dots\dots..\times (p-p_n)$$

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)\times(p-p_2)\times\dots\dots..\times(p-p_n)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots..+\frac{A_n}{p-p_n}$$

On a : $L\{e^{-a.t}\} = \frac{1}{p+a}$

Les A_i sont les coefficients réels de la décomposition calculés par identification, $f(t)$ aura donc l'expression suivante :

$$f(t) = A_1.e^{p_1.t} + A_2.e^{p_2.t} + \dots\dots..+A_n.e^{p_n.t}$$

Exemple : $F(p) = \frac{p+4}{p^2+3.p+2} = \frac{p+4}{(p+1)\times(p+2)} = \frac{A_1}{p+1} + \frac{A_2}{p+2}$

Par identification : $\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 2.A_1 + A_2 = 4 \end{cases}$ après résolution du système d'équations, on trouve les valeurs de $A_1\ et\ A_2$ suivantes :

$$A_1 = 3 \ \ et \ \ A_2 = -2$$

En remplaçant ces valeurs dans $F(p)$, on aura :

$$F(p) = \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p+2} \quad \Rightarrow \quad TL^{-1}\{F(p)\} = 3 \times e^{-t} - 2 \times e^{-2t}$$

- **cas de pôles multiples :** Le dénominateur s'écrit sous la forme :

$$D(p) = (p-p_1)^{n_1} \times (p-p_2)^{n_2} \times \dots\dots..\times (p-p_n)^{n_k}$$

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Cette fonction se décompose en éléments simples comme suit :

$$F(p) = \frac{A_{11}}{(p-p_1)^{n_1}} + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^{n_{1-1}}} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(p-p_1)} + \frac{A_{21}}{(p-p_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{A_{2n_2}}{(p-p_2)} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(p-p_k)^{n_k}} + \cdots + \frac{A_{kn_k}}{(p-p_k)}$$

On rappelle que : $TL\left\{t^n \times e^{-a.t}\right\} = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

II-1-2. Cas de $F(p)$ avec retard : $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} e^{-T.p}$

$F(p) = F_1(p) \times e^{-T.p} \quad \backslash \quad e^{-T.p}$ *est un élément irrationnel repésentant un retard pur*

$$f_1(t) = TL^{-1}\{F_1(p)\} \Rightarrow TL^{-1}\{F_1(p).e^{-T.p}\} = f_1(t-T)$$

Remarque : Pour les pôles complexes, le principe est toujours le même et ne change pas.

II-2. Méthode des résidus :

Soit $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ et $p_1, p_2, \dots \dots \dots, p_n$ sont les pôles de $F(p)$ ou les solutions de $D(p) = 0$.

La $TL^{-1}\{F(p)\} = \sum_{k=1}^{n} \underset{p=p_k}{\mathbf{Residus}}[F(p).e^{p.t}]$, Tel que :

$\underset{p=p_k}{Residus}[F(p).e^{p.t}]$ est le résidu de la fonction $(F(p).e^{p.t})$ calculé au pôle p_k *de* $F(p)$.

- **a- Calcul de $f(t)$ pour des pôles simples :** $p_1, p_2, \dots \dots \dots, p_n$ sont des pôles simples de $F(p)$.

$$\underset{p=p_k}{\mathbf{Res}}[\boldsymbol{F(p).e^{p.t}}] = \lim_{p \to p_k}[\boldsymbol{(p-p_k).F(p).e^{p.t}}]$$

- **b- Cas de pôles multiples :** soit p_k un pôle multiple :

Soit p_k un pôle multiple de multiplicité n_k.

$$\underset{p=p_k}{\mathrm{Res}}[\boldsymbol{F(p).e^{p.t}}] = \lim_{p \to p_k}\left(\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{n_k}-\mathbf{1})!}\frac{\boldsymbol{d^{n_k-1}}}{\boldsymbol{dp^{n_k-1}}}\{\boldsymbol{(p-p_k)^{n_k}.F(p).e^{p.t}}\}\right.$$

Remarque : La première partie de ce chapitre est consacrée aux propriétés de la transformée de Laplace. Cet outil sera utilisé pour représenter les systèmes linéaires et continus dans le domaine complexe, et ce dans le but d'analyser et d'étudier ses caractéristiques et ses performances.

La deuxième partie sera donc consacrée à, la représentation des systèmes asservis linéaires et continus par une fonction complexe dite fonction de transfert, tout en donnant ses notions fondamentales ainsi que ses propriétés.

Un tableau des transformées de Laplace des fonctions usuelles sera joint à cette première partie du chapitre.